Les fractions

Cours

I. Le nombre fraction

1. La fraction, en tant que quotient

Définition

a et b désignent deux nombres entiers, avec b ≠ 0. Le **quotient** de a par b est le nombre qui, multiplié par b, donne a. On le note $\frac{a}{b}$: a est le **numérateur**, b est le **dénominateur**.

Autrement dit : $a \div b = \frac{a}{b}$ et $b \times \frac{a}{b} = a$.

Exemple 1 :

$$\begin{aligned} & 3 \div 4 \\ &= \frac{3}{4} \\ &= 0{,}75 \end{aligned}$$

Vérification :

$$\begin{aligned} & 4 \times \frac{3}{4} \\ &= \frac{4 \times 3}{4} \\ &= \frac{12}{4} \\ &= 3 \end{aligned}$$

2. La fraction, un nombre exact

À retenir

Certains quotients n'ont pas d'écriture décimale exacte : 2 ÷ 3 = 0,666 6… (les 6 se répètent sans fin). Une écriture décimale comme 0,67 n'est qu'une **valeur approchée**.

La fraction $\frac{2}{3}$ est donc l'**écriture exacte** de ce nombre : on la conserve telle quelle dans les calculs pour obtenir un résultat exact.

Exemple :

$$\begin{aligned} & 3 \times \frac{2}{3} \\ &= \frac{3 \times 2}{3} \\ &= \frac{6}{3} \\ &= 2 \end{aligned}$$

Avec la valeur approchée :

$$\begin{aligned} & 3 \times 0{,}67 \\ &= 2{,}01 \end{aligned}$$

Le résultat n'est pas exact : on aurait dû trouver 2.

Document disponible sur fbmaths16.fr / Licence Creative Commons CC BY-NC-SA

3. Fractions égales

Propriété

On ne change pas la valeur d'une fraction quand on **multiplie** ou quand on **divise** son numérateur et son dénominateur par un même nombre k non nul :

$$\frac{a}{b} = \frac{a \times k}{b \times k} \qquad \frac{a}{b} = \frac{a \div k}{b \div k}$$

Multiplier : $\frac{3}{4} = \frac{3 \times 5}{4 \times 5} = \frac{15}{20}$

Diviser : $\frac{18}{24} = \frac{18 \div 6}{24 \div 6} = \frac{3}{4}$

Simplifier une fraction — fraction irréductible

Simplifier une fraction, c'est écrire une fraction égale avec un numérateur et un dénominateur plus petits, en les divisant par un diviseur commun (remarque : les critères de divisibilité par 2, 3, 5, 9, 10 aident à les trouver).

Lorsqu'on ne peut plus simplifier, la fraction est dite **irréductible**.

Exemple :

$$\frac{42}{56} = \frac{42 \div 2}{56 \div 2} \text{ } \textit{par 2} = \frac{21}{28} = \frac{21 \div 7}{28 \div 7} \text{ } \textit{par 7} = \frac{3}{4}$$

II. Comparer et ordonner des fractions

Règle 1 — Même dénominateur

Si deux fractions ont le **même dénominateur**, la plus grande est celle qui a le **plus grand numérateur**.

Exemple : $\frac{7}{9} > \frac{4}{9}$ car $7 > 4$.

Règle 2 — Même numérateur

Si deux fractions ont le **même numérateur** (non nul), la plus grande est celle qui a le **plus petit dénominateur** : on partage en moins de parts, donc chaque part est plus grande.

Exemple : $\frac{3}{5} > \frac{3}{8}$ car $5 < 8$.

Document disponible sur fbmaths16.fr / Licence Creative Commons CC BY-NC-SA

Comparer une fraction à 1

Si le numérateur est plus petit que le dénominateur, la fraction est inférieure à 1 ; s'il est plus grand, elle est supérieure à 1 ; s'ils sont égaux, elle est égale à 1.

Exemple : $\frac{7}{8} < 1$ car $7 < 8$; $\frac{9}{8} > 1$ car $9 > 8$; $\frac{8}{8} = 1$.

Méthode — Dénominateurs différents

On écrit les deux fractions avec un **même dénominateur** (dénominateur commun), puis on applique la règle 1. Le dénominateur commun le plus simple est le plus petit multiple commun des dénominateurs (PPCM).

Cas 1 : 12 est un multiple de 4.

$$\frac{3}{4} = \frac{3\times3}{4\times3} = \frac{9}{12}$$

$\frac{9}{12} > \frac{7}{12}$ donc $\frac{3}{4} > \frac{7}{12}$

Cas 2 : multiples de 6 : 6, 12, 18, **24** ; multiples de 8 : 8, 16, **24**.

$$\frac{5}{6} = \frac{5\times4}{6\times4} = \frac{20}{24} \qquad \frac{7}{8} = \frac{7\times3}{8\times3} = \frac{21}{24}$$

$\frac{20}{24} < \frac{21}{24}$ donc $\frac{5}{6} < \frac{7}{8}$

Ordonner des fractions

Ranger dans l'**ordre croissant**, c'est ranger du plus petit au plus grand (symbole <) ; dans l'**ordre décroissant**, du plus grand au plus petit (symbole >).

Exemple : ranger $\frac{2}{3}$; $\frac{5}{6}$; $\frac{7}{12}$; $\frac{1}{2}$ dans l'ordre croissant. Dénominateur commun : 12.

$\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$; $\frac{5}{6} = \frac{10}{12}$; $\frac{1}{2} = \frac{6}{12}$ donc $\frac{1}{2} < \frac{7}{12} < \frac{2}{3} < \frac{5}{6}$

Document disponible sur fbmaths16.fr / Licence Creative Commons CC BY-NC-SA

III. Les quatre opérations

1. Additionner et soustraire

Règle

Pour additionner (ou soustraire) deux fractions de **même dénominateur**, on additionne (ou on soustrait) les numérateurs et on **garde le dénominateur** :

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c} \qquad \frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c}$$

Si les dénominateurs sont **différents**, on commence par écrire les fractions avec un dénominateur commun (si possible le PPCM des dénominateurs).

Même dénominateur

a) $\frac{4}{9}+\frac{2}{9}$

$=\frac{4+2}{9}$

$=\frac{6}{9}$

$=\frac{2}{3}$ *par 3*

12 est un multiple de 4

b) $\frac{7}{12}-\frac{1}{4}$

$=\frac{7}{12}-\frac{1\times3}{4\times3}$

$=\frac{7}{12}-\frac{3}{12}$

$=\frac{4}{12}$

$=\frac{1}{3}$ *par 4*

PPCM(6 ; 4) = 12

c) $\frac{5}{6}+\frac{3}{4}$

$=\frac{5\times2}{6\times2}+\frac{3\times3}{4\times3}$

$=\frac{10}{12}+\frac{9}{12}$

$=\frac{19}{12}$

2. Multiplier

Règle

Pour multiplier deux fractions, on multiplie les **numérateurs entre eux** et les **dénominateurs entre eux** : $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$

. **Conseil :** on simplifie le plus tôt possible, en décomposant avant d'effectuer les produits.

Sans simplification

a) $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5}$

$= \frac{2 \times 4}{3 \times 5}$

$= \frac{8}{15}$

En simplifiant avant de calculer

b) $\frac{6}{35} \times \frac{14}{9}$

$= \frac{6 \times 14}{35 \times 9}$

$= \frac{2 \times 3 \times 2 \times 7}{5 \times 7 \times 3 \times 3}$ *on décompose*

$= \frac{2 \times 2}{5 \times 3}$ *par 3 et par 7*

$= \frac{4}{15}$

Cas particulier : Un nombre entier n peut s'écrire $\frac{n}{1}$ donc $n \times \frac{a}{b} = \frac{n \times a}{1 \times b} = \frac{n \times a}{b}$

exemple : $5 \times \frac{2}{7} = \frac{5 \times 2}{7} = \frac{10}{7}$

Prendre une fraction d'une quantité

Prendre $\frac{a}{b}$ d'un nombre (ou d'une fraction), c'est **multiplier** ce nombre par $\frac{a}{b}$.

Le mot « de » se traduit par l'opérateur « × ».

Les 2/3 de 45 L : $\frac{2}{3} \times 45$

$= \frac{2 \times 45}{3}$

$= \frac{2 \times 3 \times 15}{3}$

$= 30$

Les $\frac{2}{3}$ de 45 L représentent donc 30 L.

Les 3/4 de 2/5 : $\frac{3}{4} \times \frac{2}{5}$

$= \frac{3 \times 2}{4 \times 5}$

$= \frac{3 \times 2}{2 \times 2 \times 5}$

$= \frac{3}{10}$ *par 2*

Document disponible sur fbmaths16.fr / Licence Creative Commons CC BY-NC-SA

3. Diviser

Inverse d'un nombre

Deux nombres sont **inverses** l'un de l'autre lorsque leur produit est égal à 1.

L'inverse de $\frac{a}{b}$ (a ≠ 0 et b ≠ 0) est $\frac{b}{a}$. L'inverse de 5 est $\frac{1}{5}$.

Exemple : $\frac{3}{4} \times \frac{4}{3}$

$= \frac{3 \times 4}{4 \times 3}$

$= \frac{12}{12}$

$= 1$

Diviser par une fraction

Diviser par un nombre non nul revient à **multiplier par son inverse** : $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$

Une division peut aussi s'écrire comme une « fraction de fractions » : la **grande barre**, placée au niveau du signe =, signifie « divisé par ».

a) $\frac{3}{4} \div \frac{5}{2}$

$= \frac{3}{4} \times \frac{2}{5}$

$= \frac{3 \times 2}{4 \times 5}$

$= \frac{3 \times 2}{2 \times 2 \times 5}$

$= \frac{3}{10}$ *par 2*

b) $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{6}}$

$= \frac{2}{3} \div \frac{5}{6}$

$= \frac{2}{3} \times \frac{6}{5}$

$= \frac{2 \times 6}{3 \times 5}$

$= \frac{2 \times 2 \times 3}{3 \times 5}$

$= \frac{4}{5}$ *par 3*

Document disponible sur fbmaths16.fr / Licence Creative Commons CC BY-NC-SA

4. Enchaîner les calculs : priorités opératoires (“PaMDAS !”)

Règle

Dans un calcul, on effectue d'abord les calculs **entre Parenthèses**, puis les M**ultiplications et Divisions**, enfin les **Additions et Soustractions** (de gauche à droite).

a) $\frac{1}{3}+\frac{5}{3}\times\frac{2}{5}$

$= \frac{1}{3}+\frac{5\times 2}{3\times 5}$ *× prioritaire*

$= \frac{1}{3}+\frac{2}{3}$ *par 5*

$= \frac{3}{3}$

$= 1$

b) $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)\times\frac{8}{9}$

$= \left(\frac{2}{4}+\frac{1}{4}\right)\times\frac{8}{9}$ *( ) d'abord*

$= \frac{3}{4}\times\frac{8}{9}$

$= \frac{3\times 8}{4\times 9}$

$= \frac{3\times 4\times 2}{4\times 3\times 3}$

$= \frac{2}{3}$ *par 3 et 4*