Le langage algébrique

Des programmes de calcul aux expressions : lire, évaluer, transformer, prouver

1. Un programme, quatre écritures

Une trottinette en libre-service coûte **1 € pour la déverrouiller**, puis **0,20 € par minute**. Le prix se calcule toujours de la même façon : c'est un **programme de calcul**. On peut l'écrire de quatre manières.

En français

Choisir une durée (en min)
La multiplier par 0,2
Ajouter 1



Schéma (une flèche par étape, le calcul au-dessus) :

$$t \xrightarrow{\times 0{,}2} 0{,}2t \xrightarrow{+ 1} 0{,}2t + 1$$

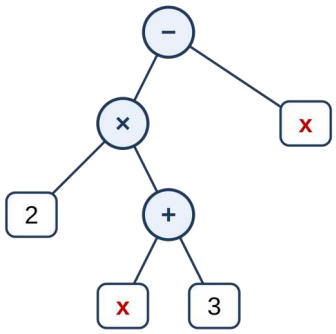
Expression algébrique : le prix, en euros, pour **t** minutes est **0,2t + 1**. Pour 15 minutes : 0,2 × 15 + 1 = **4 €**.

À retenir

Une **expression algébrique** résume un programme de calcul : la **lettre** (la variable) représente **n'importe quel nombre de départ**. Le programme, le schéma, l'expression et le script Scratch décrivent **le même calcul**.

2. Lire la structure d'une expression : l'arbre de calcul

Un **arbre de calcul** montre l'ordre des opérations. On le lit **de bas en haut** : les opérations du bas sont faites en premier, celle du **sommet** est faite **en dernier**.



Arbre de l'expression 2(x + 3) − x

- On calcule d'abord **x** + 3, puis on multiplie par 2.
- La **dernière opération** est une **soustraction** : l'expression est une **différence**.
- Ses deux **termes** sont 2(**x** + 3) et **x**.
- 2(**x** + 3) est un **produit** : ses **facteurs** sont 2 et (**x** + 3).

Dernière opération	Nature de l'expression	Exemple	Vocabulaire
addition	somme	$5x + 2$	des termes
soustraction	différence	$x^2 - 7$	des termes
multiplication	produit	$4(x - 1)$	des facteurs
élévation au carré	carré	$(x + 3)^2$	—

3. Évaluer une expression

Évaluer une expression, c'est **remplacer la lettre par un nombre** puis effectuer le calcul en respectant les priorités. Le signe × sous-entendu réapparaît, et un nombre négatif se met **entre parenthèses**.

Pour $x = -2$: $3x^2 - x + 1 = 3 \times (-2)^2 - (-2) + 1 = 3 \times 4 + 2 + 1 = \mathbf{15}$.

Attention

$3x^2$ signifie $3 \times x^2$: on élève **d'abord** au carré, **puis** on multiplie par 3. Pour $x = -2$: $3 \times (-2)^2 = 12$, alors que $(3 \times (-2))^2 = 36$.

4. Tester une égalité

Une égalité entre deux expressions peut être **vraie pour certaines valeurs** et **fausse pour d'autres**.

Pour $x = 0$: $(x + 1)^2 = 1$ et $x^2 + 1 = 1$: l'égalité est **vraie**.
Pour $x = 2$: $(x + 1)^2 = 9$ et $x^2 + 1 = 5$: l'égalité est **fausse**.

L'égalité $(x + 1)^2 = x^2 + 1$ **n'est donc pas vraie pour tout nombre** x.

5. Transformer une expression

Je veux…	Règle	Exemple
réduire	regrouper les termes de même nature	$5x + 3 - 2x + 4 = 3x + 7$
développer	$k(a + b) = ka + kb$	$4(x - 3) = 4x - 12$
développer	$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$	$(x + 2)(x + 5) = x^2 + 7x + 10$
factoriser	$ka + kb = k(a + b)$	$6x + 18 = 6(x + 3)$
factoriser	$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$	$x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$

Développer transforme un **produit** en **somme** ; factoriser fait l'inverse. Les deux expressions obtenues sont **égales pour tout nombre** x.

6. Prouver… ou réfuter

Démontrer avec le calcul littéral

• Pour prouver qu'une propriété est **vraie pour tous les nombres**, des exemples ne suffisent pas : on fait le calcul avec **une lettre**.

Exemple : la somme de trois entiers consécutifs n, $n + 1$ et $n + 2$ vaut $3n + 3 = 3(n + 1)$: c'est toujours un multiple de 3.

• Pour prouver qu'une propriété est **fausse**, **un seul contre-exemple** suffit.

Exemple : « $(x + 1)^2 = x^2 + 1$ pour tout x » est faux, car pour $x = 2$ on obtient 9 d'un côté et 5 de l'autre.

Document disponible sur fbmaths16.fr / Licence Creative Commons CC BY-NC-SA